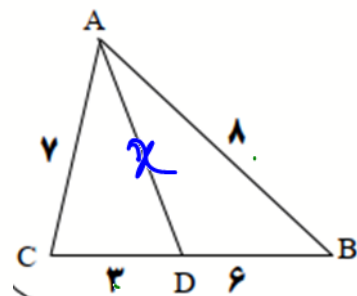
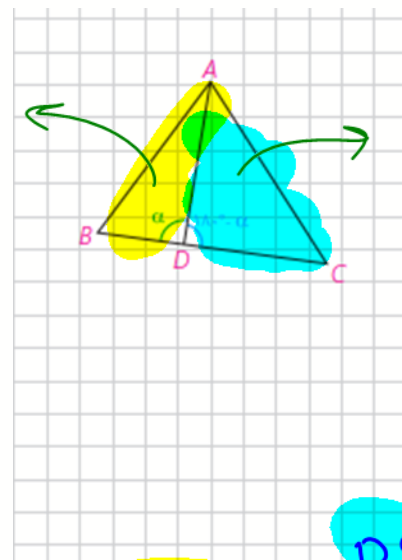


در شکل روبرو، اندازه پاره خط AD کدام است؟



- (۱) $\sqrt{37}$
(۲) ۶
(۳) $2\sqrt{7}$
(۴) $2\sqrt{10}$



۵- در مثلث ABC، نقطه دلخواه D روی BC به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث ADC و ADB درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$

به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

۶- مسئله ۲ را بار دیگر، این بار به کمک قضیه استوارت حل کنید.

$$4(4)^2 + 3(3)^2 = x^2 \times 9 + 3 \times 2 \times 6$$

(۱)

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2BD \times AD \times \cos \alpha$$

(۲)

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2DC \times AD \times \cos(180^\circ - \alpha)$$

(۱) $\times DC$

(۲) $\times DB$

$$AB^2 \times DC + AC^2 \times DB = BD \times DC (BD + DC) + AD^2 (DC + DB)$$



پویش علمی
ماندگار البرز



قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

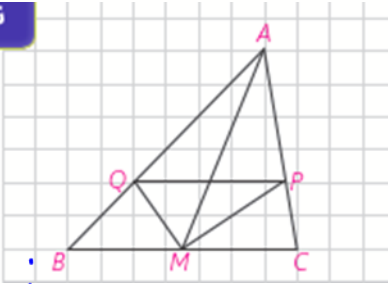
$$\text{حکم: } \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

قضیه ۲: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

تمرین

۱- در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

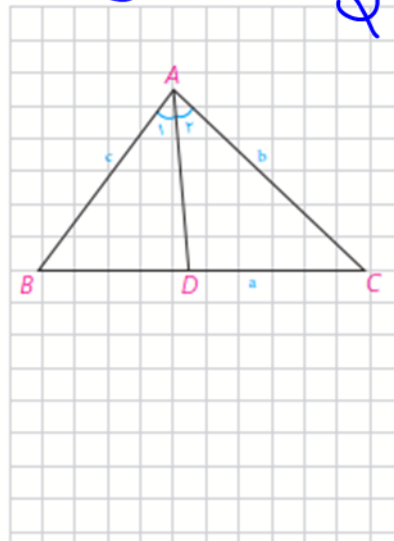


$$\begin{aligned} \triangle MAB: \quad MQ \Rightarrow \frac{AM}{MB} &= \frac{AQ}{QB} \\ \triangle AMC: \quad MP \Rightarrow \frac{AM}{MC} &= \frac{AP}{PC} \end{aligned}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \quad \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \quad \xrightarrow{MB=MC} \quad \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \Rightarrow PQ \parallel BC$$

۵- در شکل صفحه بعد AD نیمساز زاویه \hat{A} است.

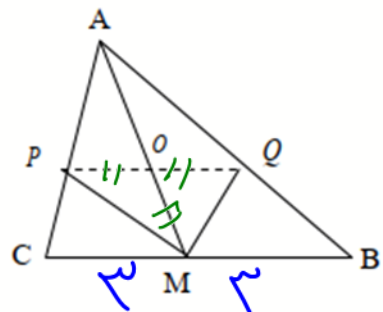
با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه طول نیمساز زاویه A به دست آورید.



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A &= \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \dots \times \dots \times \sin \frac{A}{2} \\ \Rightarrow AB \cdot AC \cdot \sin A &= AD \cdot \sin \frac{A}{2} (\dots + \dots) \\ \Rightarrow AD &= \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}} = \frac{2AB \cdot AC \cdot \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{(\dots + \dots) \sin \frac{A}{2}} \\ \Rightarrow AD &= \dots \Rightarrow (A \text{ نیمساز رأس } A) \quad d_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c} \end{aligned}$$



در مثلث ABC میانه $AM = 5$ ، $BC = 6$ نیمسازهای زوایای AMB ، AMC ضلع‌های AB و AC را در نقاط P و Q قطع می‌کند. طول PQ کدام است؟



$$MP = x = OQ = x$$

$$AO = 5 - x$$

$PQ \parallel BC$ حقیقتی است؟ $\Rightarrow \frac{AO}{AM} = \frac{PO}{MC}$

$$\frac{5-x}{5} = \frac{x}{3}$$

$$PQ = 2x$$

مثال: در مثلث ABC ، $AB=3$ ، $AC=5$ و $BC=7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.

حل: به کمک قضیه (۱) طول‌های BD و CD را به دست می‌آوریم:

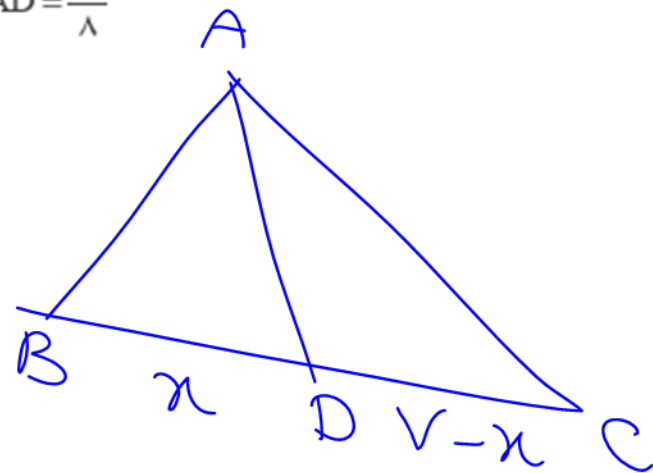
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{7}{CD} = \frac{8}{5} \Rightarrow CD = \frac{35}{8}, BD = 7 - \frac{35}{8} = \frac{21}{8}$$

حال با توجه به قضیه (۲) داریم:

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} =$$

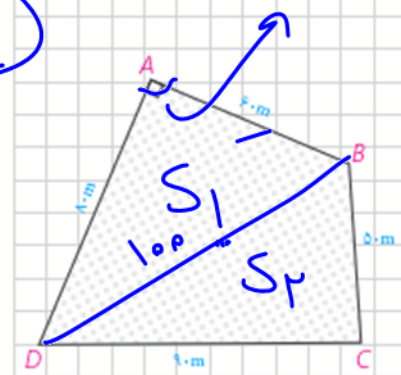
$$15 - \frac{735}{64} = \frac{225}{64} \Rightarrow AD = \frac{15}{8}$$





قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

کاردرکلاس



چهارضلعی ABCD یک مزرعه کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده‌است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به دست آورید:

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$BD^2 = \dots + \dots = \dots + \dots = \dots \Rightarrow BD = \dots$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به دست می‌آورید؟

$$S_{ABD} = \frac{\dots \times \dots}{2} = \dots$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{\dots + \dots + \dots}{2} = \dots, S_{CBD} = \dots$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با:

$$S = \dots + \dots = \dots$$

مثال: مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با:

$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \Rightarrow P = 21$$

$$s = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = \sqrt{7^2 \times 3^2 \times 2^2} = 84$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با:

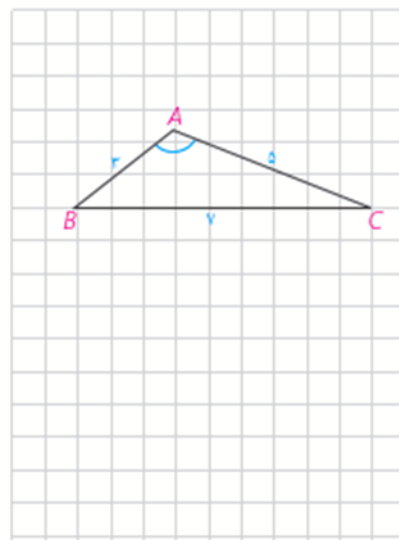
$$h_a = \frac{2s}{a} = \frac{2 \times 84}{14} = 12, h_b = \dots, h_c = \dots$$

$$h_a \times a = S \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \times 84}{15}$$

کاردکلاس

پویش علمی
ماندگار البرز

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز



۱- مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به دست آورید.

$$P = \frac{... + ... + ...}{2} = ... \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = ...$$

۲- مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ بنویسید.

۳- از مقایسه نتایج ۱ و ۲، اندازه زاویه منفرجه \hat{A} را به دست آورید.

$$p = \frac{3 + 5 + 7}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{15}{4} \sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2} (3)(5) \sin A$$

$$\frac{15}{4} \sin A = \frac{15}{4} \sqrt{3}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 60^\circ \text{ و } 120^\circ$$



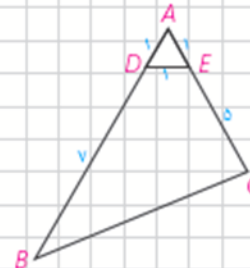
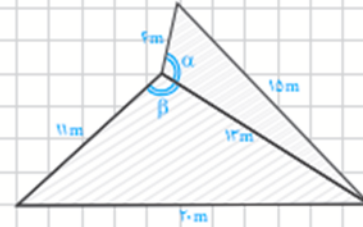
تمرین

۱- در مثلث ABC ، $AB=10$ ، $AC=6$ و $\hat{A}=60^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

۲- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.
($\alpha=\beta$)

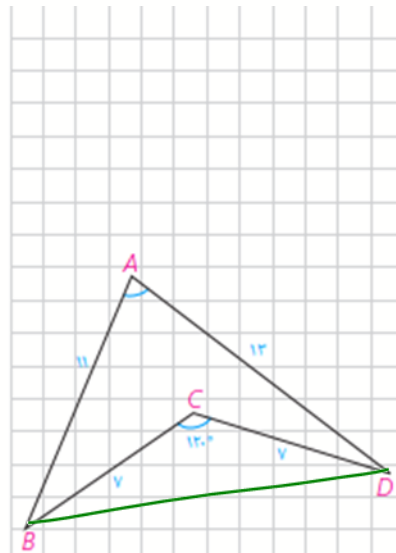
۳- دستور محاسبه مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

۴- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.



پویش علمی
ماندگار البرز

پویش جهاد علمی دبیرستان ماندگار البرز



۶- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی متر، نقطه ای که از اضلاع به طول های ۵ و ۶، به فاصله ۲ و ۳ سانتی متر است از ضلع بزرگ تر چه فاصله ای دارد؟
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

۷- در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.
راهنمایی: B را به D وصل کنید.

۸- ثابت کنید مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

۹- به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید در مثلث ABC:

- الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$
- ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$
- پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

۱۰- به کمک نتیجه تمرین ۹، حاده (تند)، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه A را در هر یک از مثلث های زیر تعیین کنید:

الف) $AB=10$, $AC=6$, $BC=9$

ب) $AB=8$, $AC=4$, $BC=9$

پ) $AB=8$, $AC=15$, $BC=17$

۵, ۴, ۷

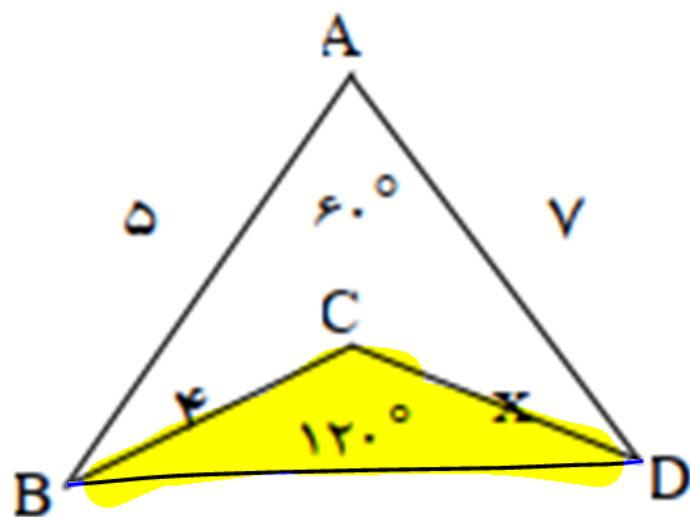
مرکز دایره محیطی در
داخل مثلث است.۷^۲ ۴^۲ + ۵^۲

۴۹ < ۳۶ + ۲۵

حاده الزاویه



در مثلث در شکل روبرو، مقدار $(x + 2)$ کدام است؟



$$BD^2 = 14 + x^2 - 2(2)(x)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$BD^2 = 14 + 4x - 2(5)(7)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + 4x + 4 = 14 \rightarrow (x + 2)^2 = 14 \rightarrow (x + 2) = \sqrt{14}$$

۲۹
۱۲
۲۲